I. NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA

1. ***Proposición***. Es un enunciado que puede ser *verdadero* (V) o *falso* (F), pero no ambos a la vez. Las cualidades V, F se denominan *valores de verdad.*

Ej. *p*: Soy un muchacho provinciano.
q: Estudio y trabajo.
r: Si consigo dinero entonces iré al cine.

2. ***Proposición simple o atómica***. Es aquella que consta solamente de sujeto y predicado.

¿Cuál de las tres proposiciones anteriores es de este tipo? R. *p*

3. ***Proposición compuesta o molecular***. Es aquella que se forma uniendo dos o más proposiciones simples mediante los conectivos lógicos: *no, y, o, entonces, si y sólo si*. Aunque hay más conectivos sólo trabajaremos con los mencionados.

Las proposiciones *q* y *r* son compuestas.

4. ***La conjunción.*** Corresponde al conectivo *y*, su símbolo es: $\wedge$

p	q	$p \wedge q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

$p \wedge q$ se lee: *p y q*

5. ***La disyunción.*** Corresponde al conectivo *o*, su símbolo es: $\vee$

p	q	$p \vee q$
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

$p \vee q$ se lee: *p o q o ambos*. Corresponde a *y/o* , se denomina *disyunción inclusiva*.

La *disyunción exclusiva* se denota por $p \Delta q$ se lee: *p o q pero no ambos*. En nuestro idioma se distinguen ambas disyunciones por el contexto. Por ejemplo, *estudio o trabajo* es inclusivo; *está vivo o muerto* es exclusivo.

6. ***La implicación o condicional.*** Corresponde al conectivo *entonces*, su símbolo es: $\rightarrow$

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

$p \rightarrow q$ se lee: *si p entonces q*.
q si es que p.
q es necesario para p.
p sólo si q.
p es suficiente para q

7. ***La doble implicación o bicondicional.*** Corresponde al conectivo *si y sólo si*, su símbolo es: $\leftrightarrow$

p	q	p $\leftrightarrow$ q
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

p $\leftrightarrow$ q se lee: *p si y sólo si q*.
p es necesario y suficiente para q.

8. ***La negación.*** Corresponde al conectivo *no*, su símbolo es: $\sim$

p	$\sim$ p
V	**F**
F	**V**

$\sim$p se lee: *no p.*
no es cierto que p.
es falso que p.

"*La negación cambia lo verdadero en falso; y, lo falso en verdadero*"

9. Las tablas de 4. a 8. se denominan tablas **básicas** y sirven de base para construir las tablas **derivadas**.

Ej. Construir la tabla de valores de verdad para $\sim p \vee q$

p	q	$\sim$p	$\vee$	q
V	V	F	**V**	V
V	F	F	**F**	F
F	V	V	**V**	V
F	F	V	**V**	F

Explicación: - En la columna de $\sim p$ se colocan las correspondientes negaciones de la columna de *p.*
- En la última columna se repiten los valores de *q.*
- La columna que está resaltada en negrita se obtiene en base a la tabla 5. de la disyunción. Esta columna es el resultado buscado.

10. ***Tautología*** **(T)**. Un esquema lógico se dice que es una *tautología* si su columna correspondiente sólo contiene valores verdaderos (V).

Ej. $\sim p \vee p$ es una tautología. Lo comprobamos con la siguiente tabla.

p	$\sim$p	$\vee$	p
V	F	**V**	V
F	V	**V**	F

11. ***Contradicción*** **(C)**. Un esquema es una *contradicción* si su columna respectiva sólo contiene valores falsos (F).
Ej. $p \wedge \sim p$ es una contradicción. Lo comprobamos con la siguiente tabla.

p	p	$\wedge$	$\sim p$
V	F	**F**	V
F	V	**F**	F

12. ***Equivalencia*** **($\equiv$)**. Dos esquemas lógicos son equivalentes cuando sus columnas de valores de verdad correspondientes son idénticas.

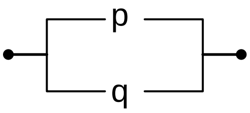
Ej. En las tablas correspondientes a $p \longrightarrow q$ (6.) y $\sim p \vee q$ (9.) observamos que ambas tienen idénticos valores de verdad: **V F V V.** Por lo tanto, ambas proposiciones son equivalentes: $\sim p \vee q \equiv p \longrightarrow q$

13. ***Leyes o equivalencias lógicas***.

13.1 $p \vee p \equiv p$; $p \wedge p \equiv p$
13.2 $p \vee q \equiv q \vee p$; $p \wedge q \equiv q \wedge p$
13.3 $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$; $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
13.4 $p \wedge (p \vee q) \equiv p$; $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (Absorción)
13.5 $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$; $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (Distributiva)
13.6 $\sim (\sim p) \equiv p$
13.7 $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$; $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (Morgan)
13.8 $\sim p \vee q \equiv p \longrightarrow q$; $p \longrightarrow q \equiv \sim q \longrightarrow \sim p$
13.9 $p \longleftrightarrow q \equiv p \longrightarrow q \wedge q \longrightarrow p$
13.10 $\sim (p \longrightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
13.11 $\sim (p \longleftrightarrow q) \equiv \sim p \longleftrightarrow q$
13.12 $p \longleftrightarrow q \equiv q \longleftrightarrow p$
13.13 $\sim p \vee p \equiv T$; $p \wedge \sim p \equiv C$
13.14 $\sim C \equiv T$; $\sim T \equiv C$
13.15 $p \vee T \equiv T$; $p \vee C \equiv p$
13.16 $p \wedge T \equiv p$; $p \wedge C \equiv C$

14. ***Circuitos lógicos***. Son esquemas gráficos que representan proposiciones lógicas. Los básicos son los siguientes:

a) $p \wedge q$: •— p — q —•

b) $p \vee q$: 

c) T : •———•

d) C : •— p — ~p —•

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determinar la tabla de valores de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $(p \wedge q) \vee (\sim p \rightarrow q)$.
b) $[p \wedge (q \rightarrow \sim p)] \vee q$.
c) $[(q \vee p) \wedge \sim p] \rightarrow q$.
d) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$.
e) $(p \leftrightarrow q) \wedge (\sim p \leftrightarrow q)$.
f) $\sim [p \vee (q \rightarrow r)] \wedge (r \rightarrow p)$.
g) $(q \leftrightarrow r) \vee (q \rightarrow \sim p)$.
h) $(p \wedge q) \rightarrow \sim p$.

2. ¿Cuáles de las proposiciones anteriores son tautologías y cuáles contradicciones?

3. Sean p: $3 \geq 3$; q: $0^0 = 1$; r: $6 < 4 \rightarrow 2 > 9$. Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $(p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow r$. b) $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow p$.

c) $[\sim r \leftrightarrow (p \rightarrow q)] \vee (q \rightarrow \sim p)$.

4. Si la proposición $(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s)$ es falsa, hallar el valor de verdad de los siguientes esquemas:

a) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$. b) $[(\sim r \vee q) \wedge p] \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$.

c) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$.

5. Si es verdadera la negación del esquema: $[(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)]$ deducir el valor de verdad de los siguientes esquemas:

a) $(r \rightarrow t) \wedge \sim (p \wedge q \wedge s)$. b) $\sim[\sim(p \rightarrow r) \rightarrow (s \wedge w)]$.

6. Empleando las leyes lógicas demuestre que las siguientes proposiciones son tautologías:

a) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q$ b) $(p \wedge q) \rightarrow p$

c) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ d) $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

7. Empleando las leyes lógicas demuestre las siguientes equivalencias:

a) $\sim(p \wedge q \wedge s) \equiv \sim p \vee \sim q \vee \sim s$ b) $[(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)] \equiv p$

c) $(p \rightarrow q) \wedge [\sim p \vee q \vee \sim s] \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

8. ¿Cuál es la correcta negación de la proposición: "*Si me das dinero entonces pago la pensión*"? Justifique.

a) Si no me das dinero entonces pago la pensión.
b) Si me das dinero entonces no pago la pensión.
c) Si no me das dinero entonces no pago la pensión.
d) Me das dinero y pago la pensión.
e) Me das dinero y no pago la pensión.

9. Negar las siguientes proposiciones empleando las leyes de Morgan y las equivalencias correspondientes.

a) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r)$ b) $(\sim(p \wedge r) \vee s) \wedge t$

c) $(q \vee p) \wedge \sim(p \rightarrow q)$ d) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (s \vee \sim r)$

e) $((p \vee \sim r) \wedge (\sim r \rightarrow s)) \vee t$ f) $((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow s$

10. Aplicar la ley distributiva.

a) $(\sim p \wedge r) \vee s$ b) $(p \wedge q) \vee (q \wedge r)$

c) $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim p)$ d) $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \vee \sim r)$

e) $(p \wedge q) \wedge (q \vee r)$ f) $(p \rightarrow q) \wedge [(\sim p \rightarrow q) \vee r]$

11. Simplificar usando la ley de absorción o las equivalencias correspondientes.

a) $(p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge r)$ b) $\sim p \wedge (q \vee \sim p)$

c) $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r)$ d) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r \wedge q) \vee p$

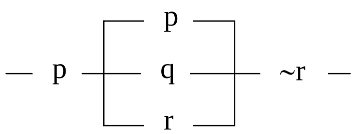
e) $q \wedge (p \vee \sim p)$ f) $q \wedge (p \vee \sim q)$

12. Determinar el circuito lógico correspondiente a cada proposición.

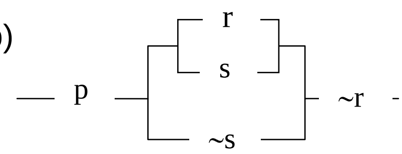
a) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ b) $\sim p \wedge (q \vee \sim p) \wedge r$
c) $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee r)$ d) $p \wedge r \wedge ((q \vee p \vee q) \vee r)$
e) $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q \vee r)$ f) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\sim p \wedge r)$

13. Determinar proposición correspondiente a cada circuito lógico y simplificarlo.

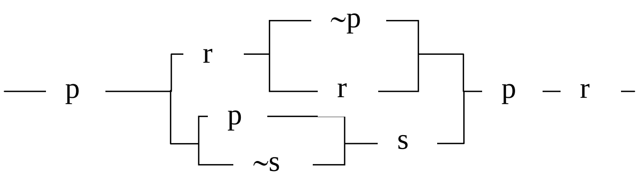
a)



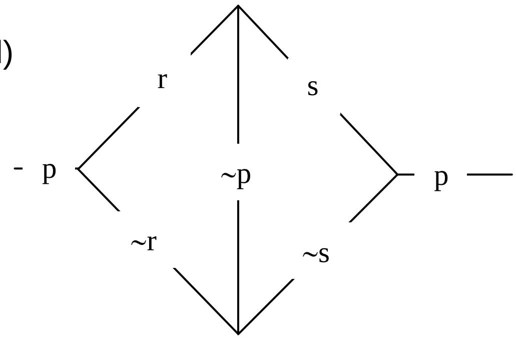
b)



c)



d)



e)