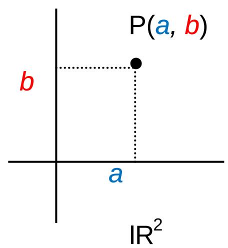
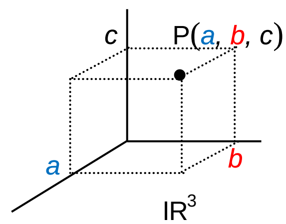
VECTORES, PLANOS Y RECTAS EN R^2 Y R^3

1. *Puntos en* R^2 *y* R^3

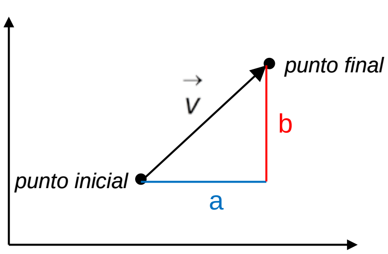
Un par ordenado (*a*, *b*) y una terna ordenada (*a*, *b*, *c*) representan puntos de IR^2 y IR^3, respectivamente. *a*, *b*, *c*, se denominan coordenadas del punto.



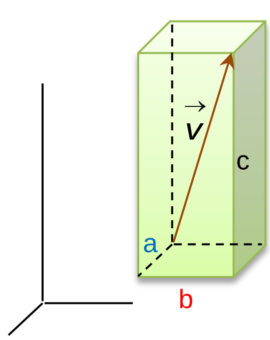


2. *Vectores en* R^2 *y* R^3

Un par (*a*, *b*) no solamente designa un punto, también designa un vector cuya representación gráfica es una flecha. Para graficarla, se escoge un punto cualquiera del plano (punto inicial) y de allí se recorren dos direcciones: *a* unidades paralelas al eje X y *b* unidades paralelas al eje Y, según el signo de las componentes. Se unen el punto inicial y final del recorrido con una flecha con el cabezal en el punto final.

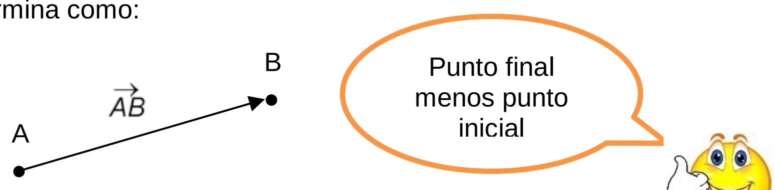


De manera similar se grafican vectores de IR^3. $\vec{v}$ =(a, b, c)



Los puntos se denotan por una letra simple (P) mientras que los vectores se denotan por una letra con una flecha encima ($\vec{v}$)

Nota. Dados los puntos inicial A y final B, de un vector (de R^2 o R^3). El vector entre ellos se determina como:



$$\vec{AB} = B - A$$

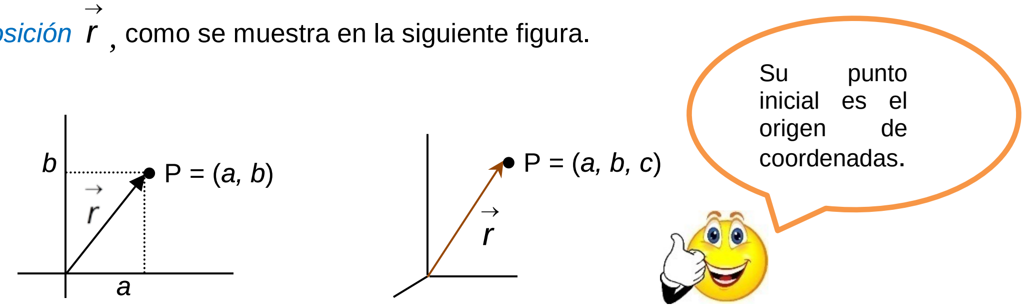
Ej. Determinar el vector $\vec{AB}$, si A= (-2, 3,1) y B= (3, 0 -2)

Sol.

$$\vec{AB} = (3, 0 -2) – (-2, 3,1) =(5, -3, -3)$$

3. *Radio vector*

Cada punto, del plano o del espacio, tiene asociado un vector llamado *radio vector* o *vector posición* $\vec{r}$, como se muestra en la siguiente figura.



$\vec{r} = (a, b)$ $\vec{r} = (a, b, c)$

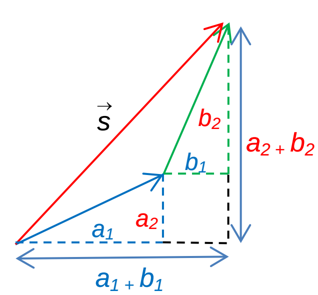
4. *Operaciones con vectores*.

Las siguientes operaciones se definen para vectores de IR^2 pero, salvo 4.4, son igualmente válidas para vectores de IR^3

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$

4.1 *Suma* de vectores:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$



4.2. *Producto por un escalar r* $\in$ IR:

$$r(a, b) = (ra, rb)$$

Ej. 3(4, –5) = (3x4, 3x(-5))= (12, –15)

4.3 *Producto escalar*:

$$(a_1, a)\cdot(b_1, b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$$

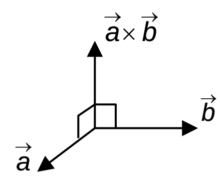
Ej. Si $\vec{a}$ = (-2,3), $\vec{b}$ = (5,2), calcular $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Sol.

$$(-2,3)\cdot(5,2) = (-2)\text{x}5 + 3\text{x}2 = -10+6 = -4$$

4.4 *Producto vectorial* (sólo para vectores de IR^3):

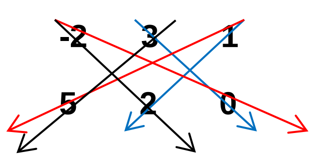
$$(a_1, a_2, a_3)\times(b_1, b_2, b_3) = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$



Ej. Si $\vec{a}$ = (-2,3,1), $\vec{b}$ = (5,2,0), calcular $\vec{a}$ x $\vec{b}$.

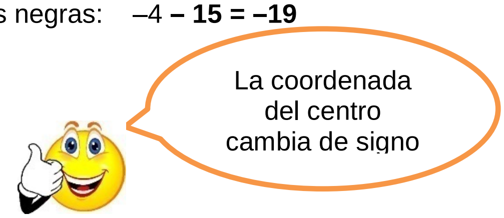
Sol.

Una manera fácil de recordar esta operación es disponiendo los vectores como se muestra, luego multiplicamos y restamos en la dirección de las flechas



Producto y diferencia de flechas azules: **0 – 2 = – 2**
Producto y diferencia de flechas rojas: **0 – 5 = – 5**
Producto y diferencia de flechas negras: –4 **– 15 = –19**

$\vec{a}$ x $\vec{b}$ =(**– 2, 5, –19**)



5. ***Módulo***.

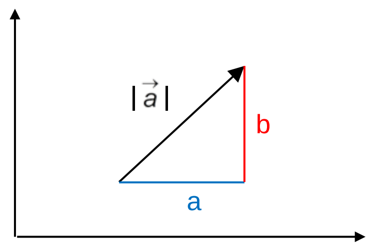
Dado un vector $\vec{a} = (a_1, a_2)$ se define su *módulo* como:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Para un vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ la definición es similar:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

El módulo representa la longitud de la flecha.



Ej. Calcular el módulo de $\vec{a} = (-2, 3, 1)$

Sol.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{15}$$

6. ***Vector unitario***.

Es un vector cuyo módulo es igual la unidad.

$$|\vec{u}| = 1$$

Ej.

1. $\vec{u} = (0, -1)$ es unitario porque $|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$
2. $\vec{u} = (\text{sen}\alpha, \cos\alpha)$ es unitario porque $|\vec{u}| = \sqrt{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha} = \sqrt{1} = 1$

Nota.

Los vectores (1, 0), (0, 1) se denotan por $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, respectivamente. Esto es:

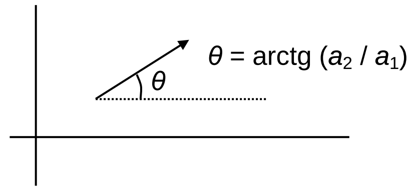
$$\hat{\imath} = (1, 0)$$
$$\hat{\jmath} = (0, 1).$$

Similarmente, en R^3:

$$\hat{\imath} = (1, 0, 0)$$
$$\hat{\jmath} = (0, 1, 0)$$
$$\hat{k} = (0, 0, 1).$$

7. *Dirección*.

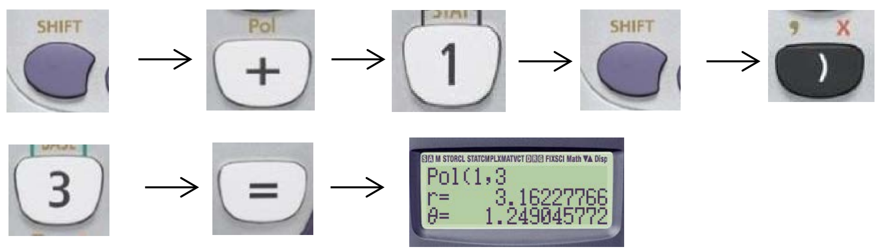
Dado un vector $\vec{a} = (a_1, a_2)$ se define su dirección como el ángulo θ tal que



Ej. Calcular la dirección del vector $\vec{a} = (1, 3)$

Sol.

Programamos la calculadora en modo “pol”:



Tenemos, simultáneamente:

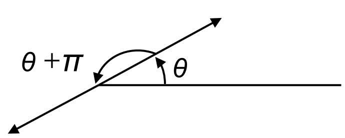
el *módulo* r =3, 1623

y la *dirección* θ =1,2490 rad<> 71,565º

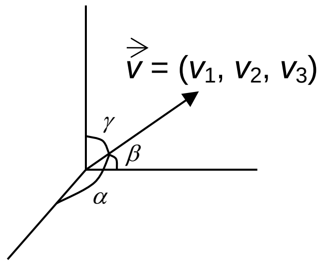
***Nota* 1**. Dado el módulo y la dirección de un vector, éste se puede determinar de la siguiente manera:

$$\vec{a} = |\vec{a}|(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\ldots 7.1$$

***Nota* 2**. La dirección $\theta + \pi$ es la *dirección opuesta* de θ.



Para un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se definen sus ángulos directores mediante sus respectivos cosenos directores:



$$\cos\alpha = \frac{v_1}{|\vec{v}|}, \cos\beta = \frac{v_2}{|\vec{v}|}, \cos\gamma = \frac{v_3}{|\vec{v}|}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Ej. Calcular los ángulos directores de $\vec{a} = (-2, 3, 1)$.

Sol.

$$\propto = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{15}}\right) = 121{,}09^{o}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{15}}\right) = 39{,}23^{o}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) = 75{,}04^{o}$$

8. ***Vector unitario.***

Si $\vec{a}$ no es unitario y $|\vec{a}| \neq 0$ se define el vector unitario en la dirección de $\vec{a}$ como:

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Ej. Calcular el vector unitario en la dirección de $\vec{a} = (-2, 3, 1)$.

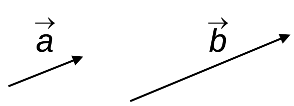
Sol.

$$\vec{a} = \frac{(-2, 3, 1)}{\sqrt{15}} = \left(\frac{-2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right)$$

9. ***Vectores paralelos.***

Dos vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ son paralelos ($\vec{a} \,//\, \vec{b}$) si existe $r \in$ IR tal que:

$$\vec{a} = r\vec{b}$$



Ej.

(4, 0) // (-2, 0) porque: (4, 0) = -2(-2, 0)

Nota 1. Si $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ y ninguna componente es cero se tiene:

$$\vec{a} \mathbin{//} \vec{b} \leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \qquad 8.1$$

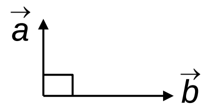
La misma propiedad se puede hacer extensiva para vectores de IR^3.

Nota 2. Si $\vec{a}$, $\vec{b} \in IR^3$: $\vec{a} \mathbin{//} \vec{b} \leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ 8.2

10. *Vectores ortogonales*.

Dos vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ son ortogonales ($\vec{a} \perp \vec{b}$) si:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

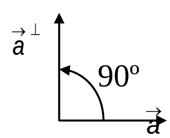


Ej. (-3, 4) ⊥ (12, 9) porque (-3, 4).(12, 9)= -36 + 36 = 0

10.1 $\vec{a} \perp \vec{b} \leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

10.2 Si $\vec{a} = (a_1, a_2)$, se define el vector ortogonal de $\vec{a}$ como:

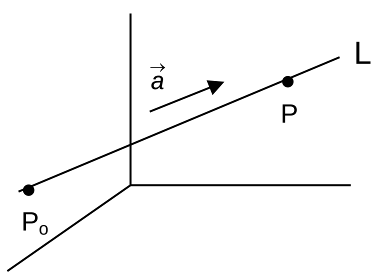
$$\vec{a}^{\perp} = (-a_2, a_1)$$



Ej. $(-3, 4)^{\perp} = (-4, -3)$

11. *Rectas en R^2 y R^3*

La representación vectorial de rectas en IR^3 es igualmente válida para rectas en IR^2, con las salvedades del caso.



$$P = P_o + t\vec{a}, \quad t \in IR \qquad 11.1$$

L: recta de IR^3,

P_o: punto de paso de L.

$\vec{a}$: vector director o dirección de L.

t se denomina parámetro de la recta.

Ej. Determinar la ecuación vectorial de la recta que pasa por P_o =(2,5) y paralela con $\vec{a}$ =(-2, 7)

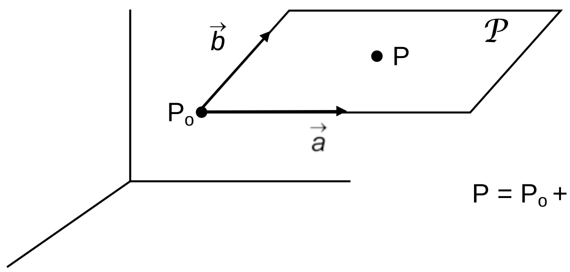
Sol.

Usamos 11.1:

$$P= (2,5) + t(-2, 7),\ t \in IR$$

Nota. Si se elimina el parámetro de una recta en IR^2 se obtiene la ecuación general de la recta; y, en IR^3 se obtiene la ecuación simétrica.

12. *Planos en* IR^3.



$$P = P_o + r\vec{a} + s\vec{b}\ ; \quad r, s \in IR \quad 12.1$$

$\mathcal{P}$: plano en IR^3,

P_o: punto de paso de $\mathcal{P}$.

$\vec{a}$, $\vec{b}$: vectores generatrices de $\mathcal{P}$.

r, s se denominan parámetros del plano $\mathcal{P}$.

P: punto cualquiera de $\mathcal{P}$

Ej.

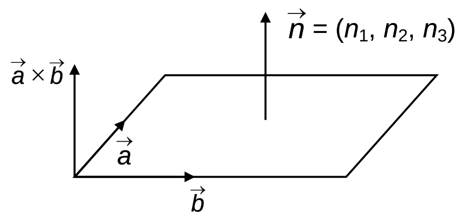
Un plano que pasa por (2, 4, -1) cuyas generatrices son (0, 2, 5) y (3, -3, 4) tiene por ecuación

$$P = (2, 4, -1)+r(0, 2, 5) + s(3, -3, 4) \qquad r, s \in IR$$

13. *Normal*

Todo vector perpendicular al plano se denomina ***normal*** del plano. En particular el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es una normal.

Cualquier otra normal es paralela a $\vec{a} \times \vec{b}$ $(\vec{a} \times \vec{b} = r\vec{n})$.



14. *Ecuación general*

Las componentes de la normal forman parte de la ecuación general del plano:

$$n_1x + n_2y + n_3z + k = 0 \qquad 14.1$$

Ej.

Calcular la ecuación general del plano del ejemplo en 12.

Sol.

Calculamos la normal basada en el producto vectorial de los generadores:
$\vec{a} = (0, 2, 5)$, $\vec{b} = (3, -3, 4)$, $\vec{a} \times \vec{b} = (23, -15, -6)$

La ecuación del plano, momentáneamente, es: $23x - 15y - 6z + k = 0$ (1)

Calculemos k, para ello usamos el punto (2, 4, -1), lo reemplazamos en (1):

$23(2) - 15(4) - 6(-1) + k = 0 \rightarrow k = 7$

Finalmente tenemos la ecuación completa del plano:

$$23x - 15y - 6z + 7 = 0$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Efectuar:

1. 2(1, 2, –3) + 3(1, –3, 1) –5(2, 3, –4).

2. (1, 0, 3)×(1, 4, 5) –3(–2, 2, –1).

3. [(2, 5, 3)×(1, 2, –3)]× (4, 5, –1).

4. [(2, 5, 3)×(1, 2, –3)]·(4, 5, –1).

5. [(1, 2, 0) – 3(2, 3, 1)]·(1, 0, 2)×(1, 1, 5)

II. Calcular los módulos indicados:

1. $\left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|$ 2. |(2, 5, 3)| 3. | 2(1, 2, –3) + 3(1, –3, 1) |

4. | [(2, 5, 3)×(1, 2, –3)] × (4, 5, –1) |

5. | (1, 1, –3)×(2, 3, –1) – (0, 0, 2) |

III. Hallar los vectores ortogonales correspondientes, luego calcule los respectivos módulos.

a) (–3,2) b) (4,5) c) (2, –1) d) (– 6, –7)

IV.

1. Si A =(8, 6), B =(2, –3), hallar el vector $\overrightarrow{AB}$, y el vector $\overrightarrow{BA}$.

2. Si $\overrightarrow{A}$ = (8, 6) y $\overrightarrow{AB}$ = (5, –3), hallar B.

3. Si $\overrightarrow{B}$ = (1, 4) y $\overrightarrow{AB}$ = (4, 0), hallar A.

V. Determinar el módulo y la dirección correspondiente a cada vector:

1. (5, 6) 2. (–3, 2) 3. (–3, –5) 4. (4, –7).

VI. Determinar los cosenos y ángulos directores correspondientes a cada vector:

1. (2, 6, 5) 2. (–3, 2, 1) 3. (–1, –2, –1) 4. (4, –2, 0).

VII. Determine cuáles de los siguientes vectores son unitarios, en el caso que no lo sean determine el correspondiente unitario en esa dirección

1. (–3,4) 2. (0, –1) 3. (5, 6)

4. (–3, 2) 5. (2, 5, 3) 6. $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$

7. (–1, 2, –1) 8. (4, –2, 0).

VIII. Determinar las componentes del vector correspondiente, dados su módulo y dirección:

1. 8; 45º   2. 7; 125º   3. 6; 300º   4. 10; –30º

IX.

a) Hallar el valor de x si los vectores dados son paralelos:

1. (x, 6); (x–1, 4)   2. (x+1, 3); (x–1, 2)

b) Hallar el valor de x si los vectores dados son ortogonales:

1. (x, 6); (x–10, 4)   2. (x+1, 3); (x–1, –2)

X.

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (0, –1, 2) y que es paralela al vector (–2, 0, 9).

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos: (2, –1, 4) y (3, 5, –1).

3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (2, 1, 4) y que es paralela a la recta $L = \{(4, -2, 3) + t\,(1, -1, 0) / t \in \mathrm{IR}\}$

4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (2, 1, 4) y que es ortogonal a la recta $L = \{(4, -2, 3) + t(1, -1, 0) / t \in \mathrm{IR}\}$.

5. Hallar la ecuación de la recta que es ortogonal a las rectas $L_1 = \{(1, -2, 1) + t(1, -1, -1) / t \in \mathrm{IR}\}$ y $L_2 = \{(3, 2, -1) + t(1, 2, -3) / t \in \mathrm{IR}\}$.

XI.

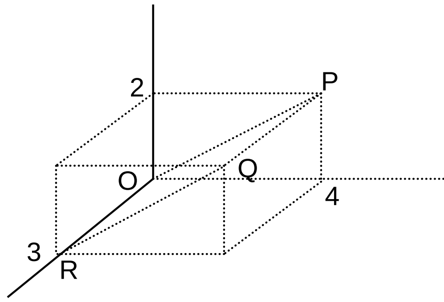
1. Hallar la ecuación general del plano que pasa por los puntos: (–3, 2, 1), (–1, 2, –1) y (4, –2, 0).

2. Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto: (–1, 3, 4) y que es ortogonal a la recta $L = \{(2, 3, -5) + t(4, 2, 5) / t \in \mathrm{IR}\}$.

3. Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto (–3, 5, 2) y que es paralelo al plano $2x + 3y - z + 1 = 0$.

4. Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto (–3, 2, 2) y que es paralelo a las rectas $L_1 = \{(1, -2, 1) + t\,(1, -1, -1) / t \in \mathrm{IR}\}$ y $L_2 = \{(3, 2, -1) + t(1, 2, -3) / t \in \mathrm{IR}\}$.

5. Hallar la ecuación del plano OPQR.



XII.

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (0, 0, 5) que es ortogonal al plano $3x + 4y + 5z - 9 = 0$.

2. Hallar la intersección de la recta que pasa por los puntos (–1, 2, 1), (3, –2, 0) con el plano $3x + 6y - 2z - 4 = 0$.